



โครงการห้องเรียน พิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยี และ สิ่งแวดล้อม

รูปแบบที่ใช้ในการหาปริภูมิตัวอย่าง ในจิกซอร์วแบบสลับขนาด $m \times n$

ครูที่ปรึกษา

ครูปิติพงษ์ วิทยากรณัฏฐ์ประภาส

ครูเทพรักษ์ แก้วกสิกรรม

คณะผู้จัดทำ

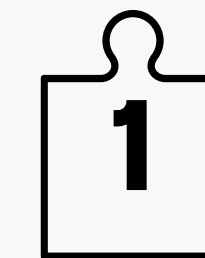
นายกัณตภณ กุศลเอี่ยม

นายกฤตธรณโชค ฟักผล

นายปัฐน์ ทுகิต

โรงเรียนอุทัยวิทยาคม

ที่มาและความสำคัญ



จิกซอว์เป็นของเล่นที่เด็กๆ และผู้ใหญ่เล่นกันทั่วไป แต่จิกซอว์มีประโยชน์มากกว่าแค่กิจกรรมสนุกๆ ที่ช่วยให้เด็กๆ เพลิดเพลิน จิกซอว์เป็นหนึ่งในสิ่งที่สามารถเสริมสร้างพัฒนาการของเด็กเล็กได้โดยมีประโยชน์หลากหลายด้าน อาทิ เพิ่มสมาธิในการจดจ่อกับสิ่งที่ทำ การประสานงานระหว่างตากับมือ อีกทั้งยังช่วยเสริมสร้างความจำ และความคิดสร้างสรรค์อีกด้วย

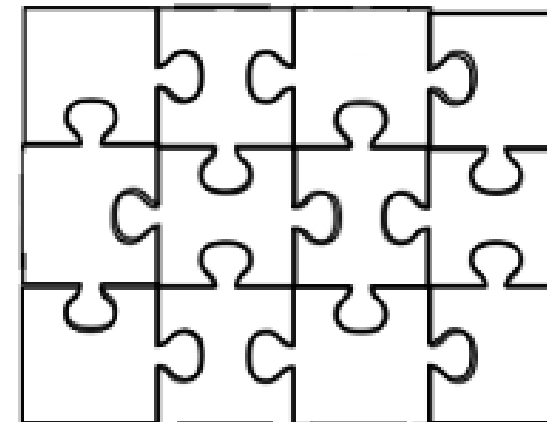
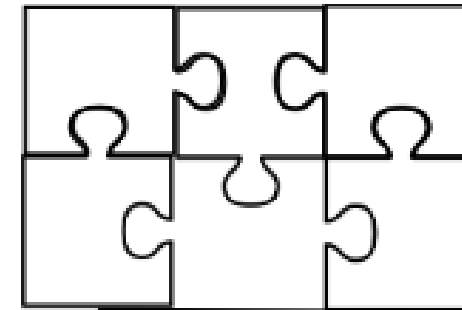
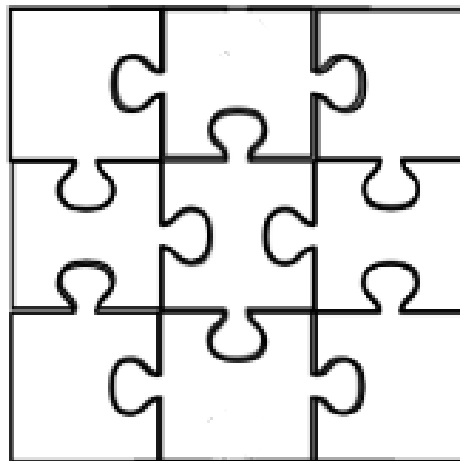
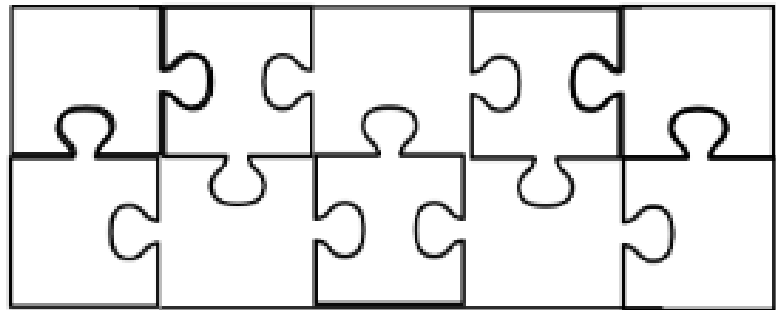
คณะผู้จัดทำจึงเล็งเห็นถึงความสำคัญของความน่าจะเป็น โดยรูปแบบในการหาปริภูมิตัวอย่างในจิกซอว์ขนาด $m \times n$ การศึกษานี้มุ่งเน้นไปที่การคำนวณจำนวนรูปแบบทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการจัดเรียงชิ้นส่วนในจิกซอว์ขนาด $m \times n$ โดยพิจารณาความเป็นไปได้ของแต่ละรูปแบบเพื่อคำนวณปริภูมิตัวอย่างของจิกซอว์ไปใช้ในการเปรียบเทียบความยากง่ายของจิกซอว์ในแต่ละขนาด

1. เพื่อศึกษารูปแบบการต่อกันของจิ๊กซอว์ในแต่ละขนาดและรูปแบบต่างๆโดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ในเรื่องของความน่าจะเป็นโดยการนำปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์แต่ละขนาดมาเปรียบเทียบกัน
2. เพื่อหาความสัมพันธ์ของปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์แบบสลับเพื่อใช้ในการสร้างรูปแบบในการหาปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์แบบสลับที่มีขนาด $m \times n$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 6

นิยามศัพท์เฉพาะ

3

1.จิ๊กซอว์แบบสลับ หมายถึง จิ๊กซอว์ที่มีรูปร่างของชิ้นส่วนเป็นในลักษณะเดียวกัน



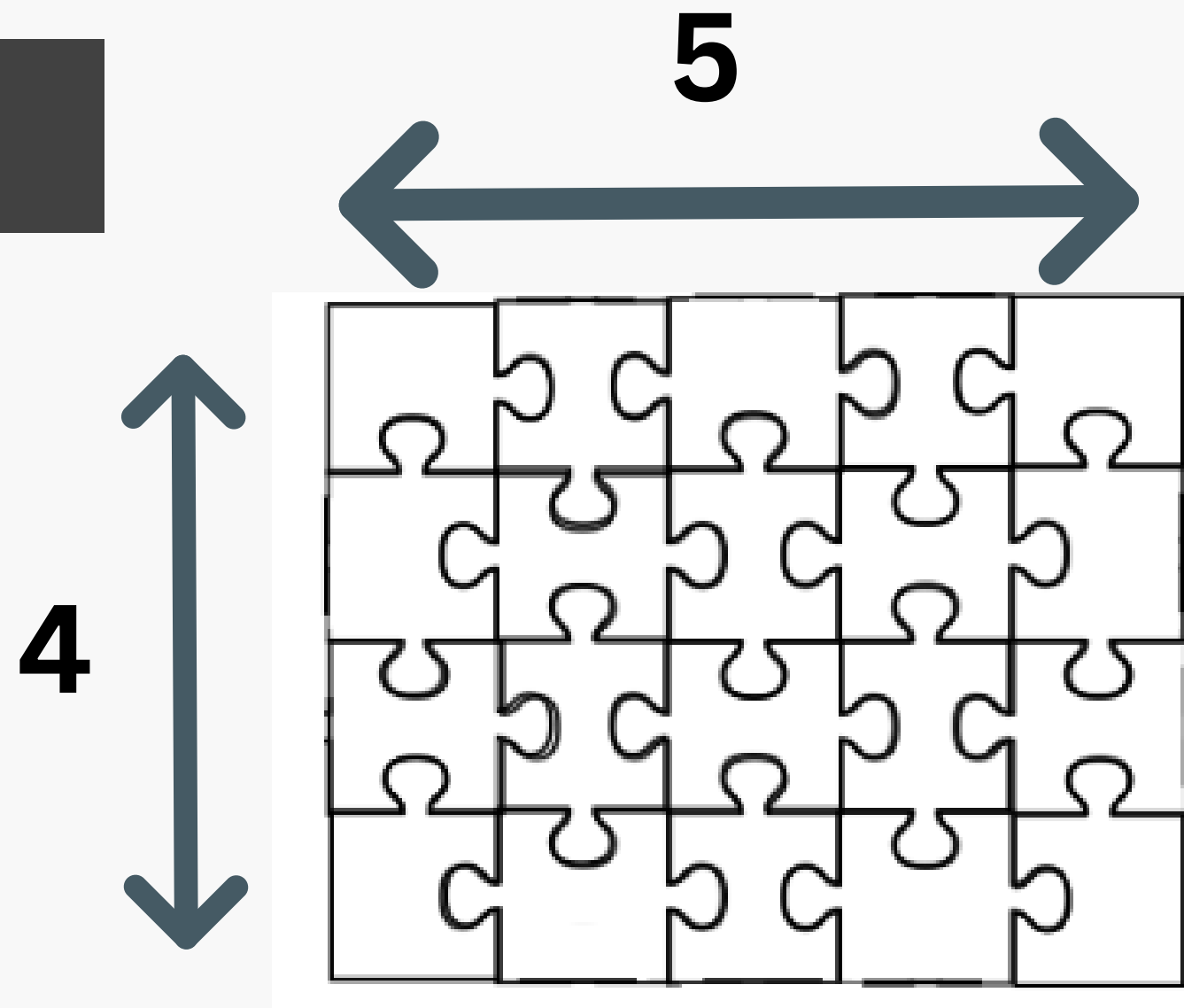
นิยามศัพท์เฉพาะ

4



2. $m \times n$ หมายถึง ขนาดของจิ๊กซอว์เมื่อ m และ n มากกว่าหรือเท่ากับ 2 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ

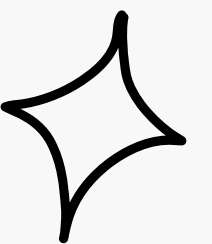
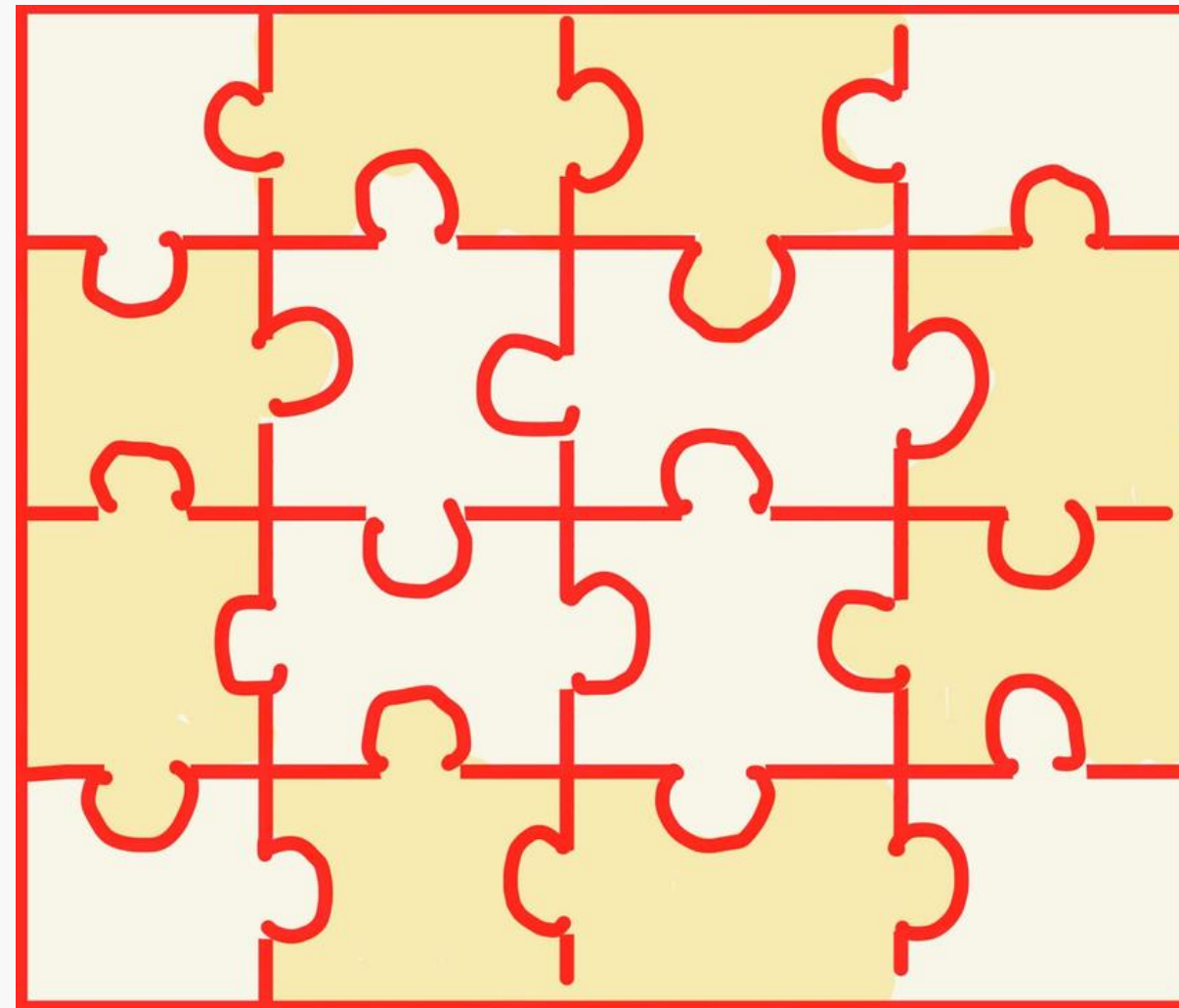
ตัวอย่าง เมื่อ $m = 4$ และ $n = 5$



นินยามคัพทเฉพา

5

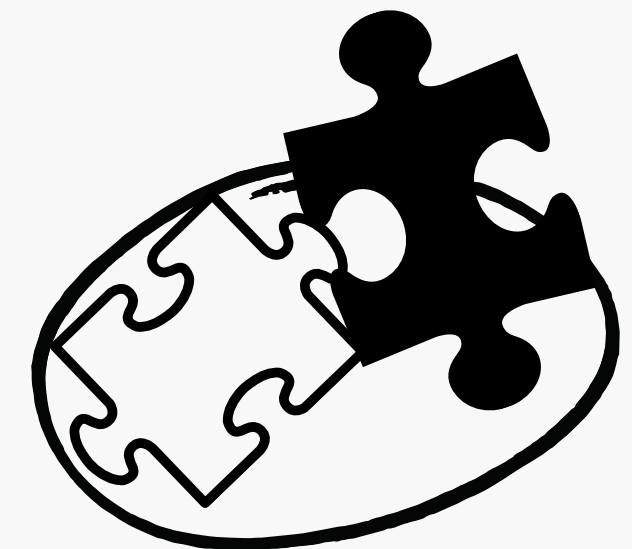
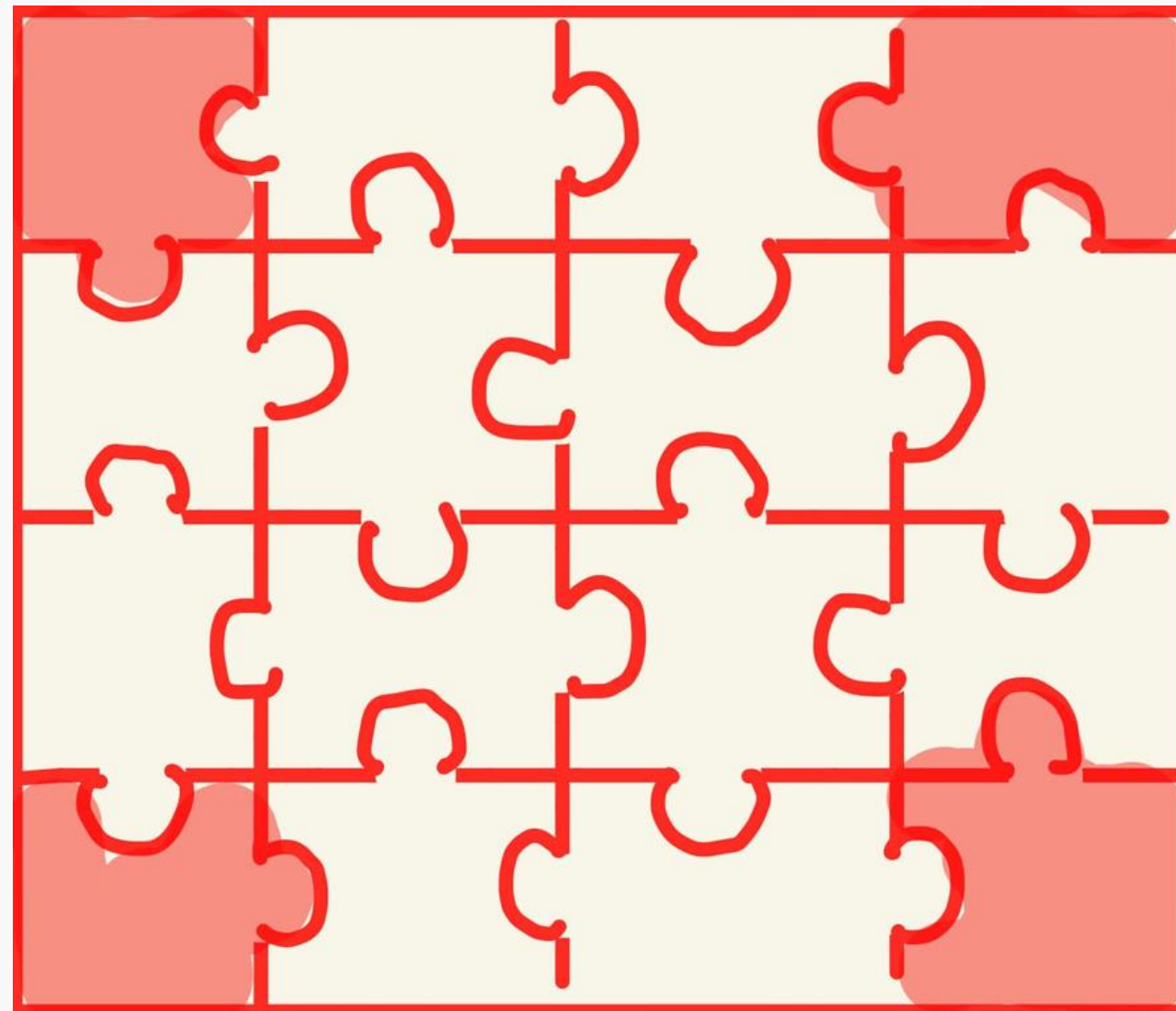
3.ส่วนขอบ หมายถึง ชิ้นส่วนที่ไม่สามารถต่อกับชิ้นอื่นได้ 1 ด้าน



นิยามศัพท์เฉพาะ

6

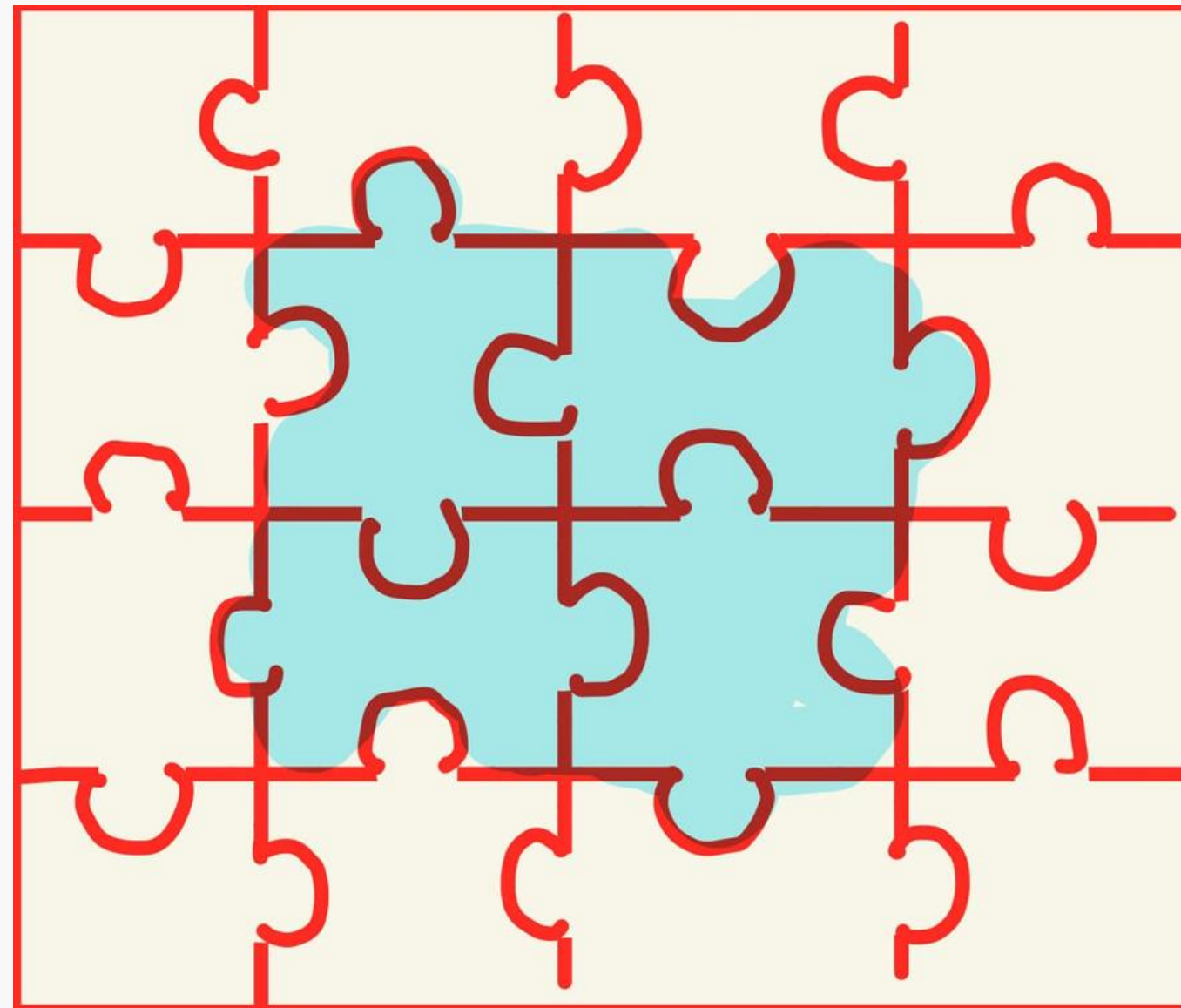
4. ส่วนมุม หมายถึง ชิ้นส่วนที่ไม่สามารถต่อกับชิ้นอื่นได้ 2 ด้าน



นิยามศัพท์เฉพาะ

7

5. ส่วนกลาง หมายถึง ชิ้นส่วนที่สามารถต่อกับชิ้นอื่นได้ทุกด้าน



ขอบเขตในการศึกษา โครงการ

8

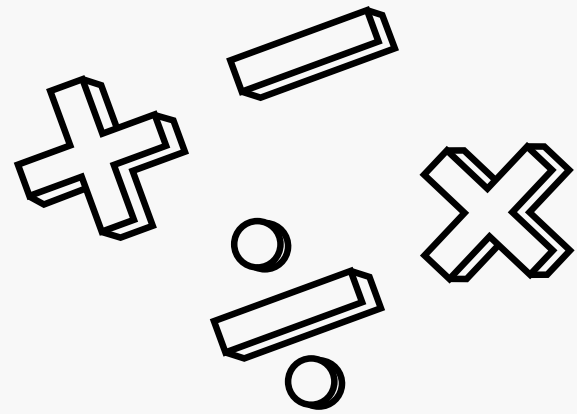
ศึกษารูปแบบของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 6



เอกสารและงานวิจัย ที่เกี่ยวข้อง

9

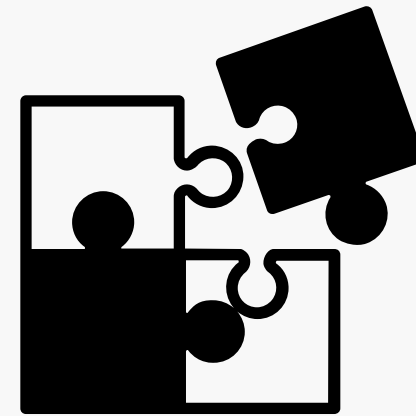
ความหมายของคณิตศาสตร์



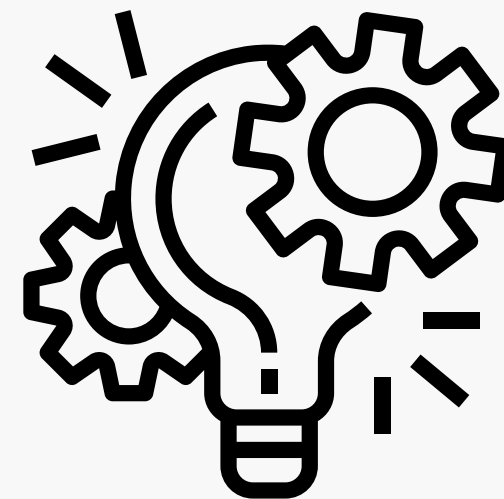
หลักการนับเบื้องต้น

× n!

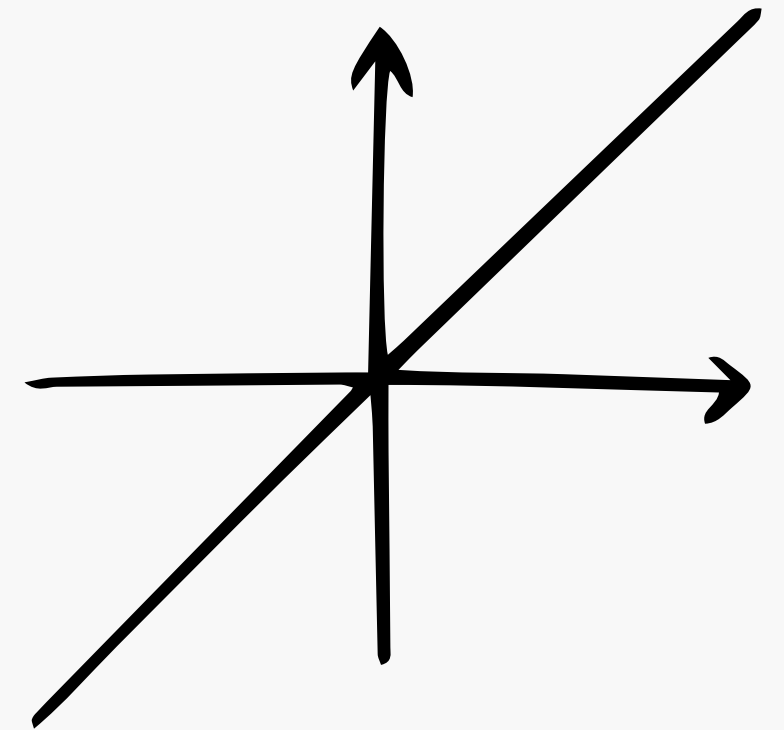
ความหมายของจิ๊กซอว์



โครงการที่เกี่ยวข้อง



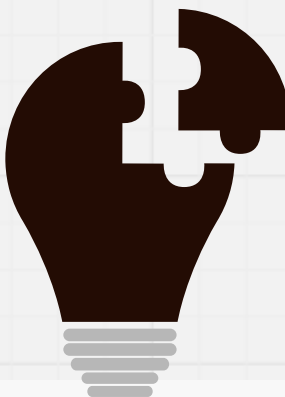
สมการเส้นตรง



ขั้นตอนการดำเนินงาน

MATH

10



ตอนที่ 1. ศึกษารูปแบบและความสัมพันธ์ของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ ต่อขนาดของ
จิ๊กซอว์ที่เปลี่ยนแปลงไป

1.1 จำนวนและรูปแบบของชิ้นจิ๊กซอว์ที่สามารถสลับกันได้โดยชิ้นจิ๊กซอว์ที่สามารถสลับกันได้ในจิ๊กซอว์

ขนาด $m \times n$

จะมีชิ้นจิ๊กซอว์ 4 - 5 แบบโดยจะกระจายอยู่ส่วนต่างๆดังนี้

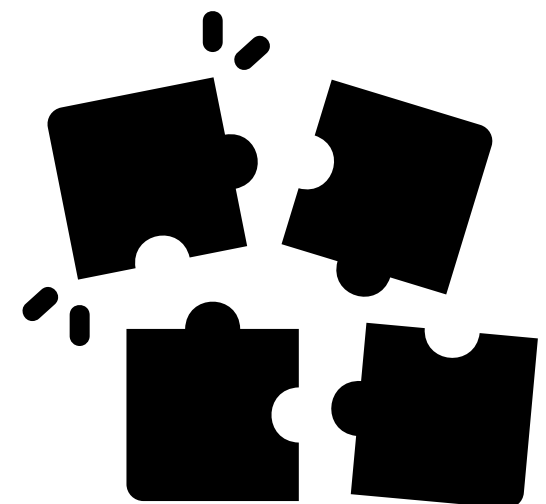
1.1.1 ส่วนมุมจะมีชิ้นจิ๊กซอว์ที่สามารถสลับกันได้ 1 - 2 แบบโดยแบ่งตามเงื่อนไขดังนี้

1.1.1.1 เมื่อ m และ n หาร 2 ลงตัวจะมี 1 รูปแบบที่สามารถสลับกันได้โดยสลับได้ 4 ชิ้น

1.1.1.2 เมื่อ m หรือ n หาร 2 ไม่ลงตัวจะมี 2 รูปแบบที่สามารถสลับกันได้โดยสลับได้รูปแบบละ 2 ชิ้น

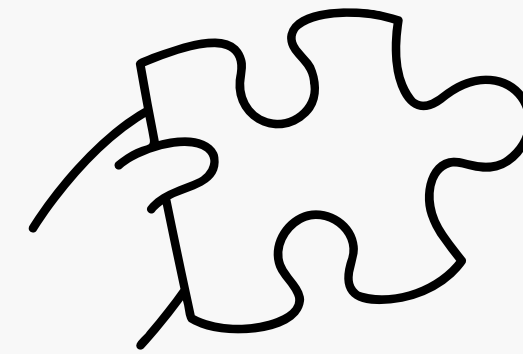
1.1.2 ส่วนขอบจะมี 2 รูปแบบที่สามารถสลับกันได้

1.1.3 ส่วนกลางจะมี 1 รูปแบบที่สลับกันได้

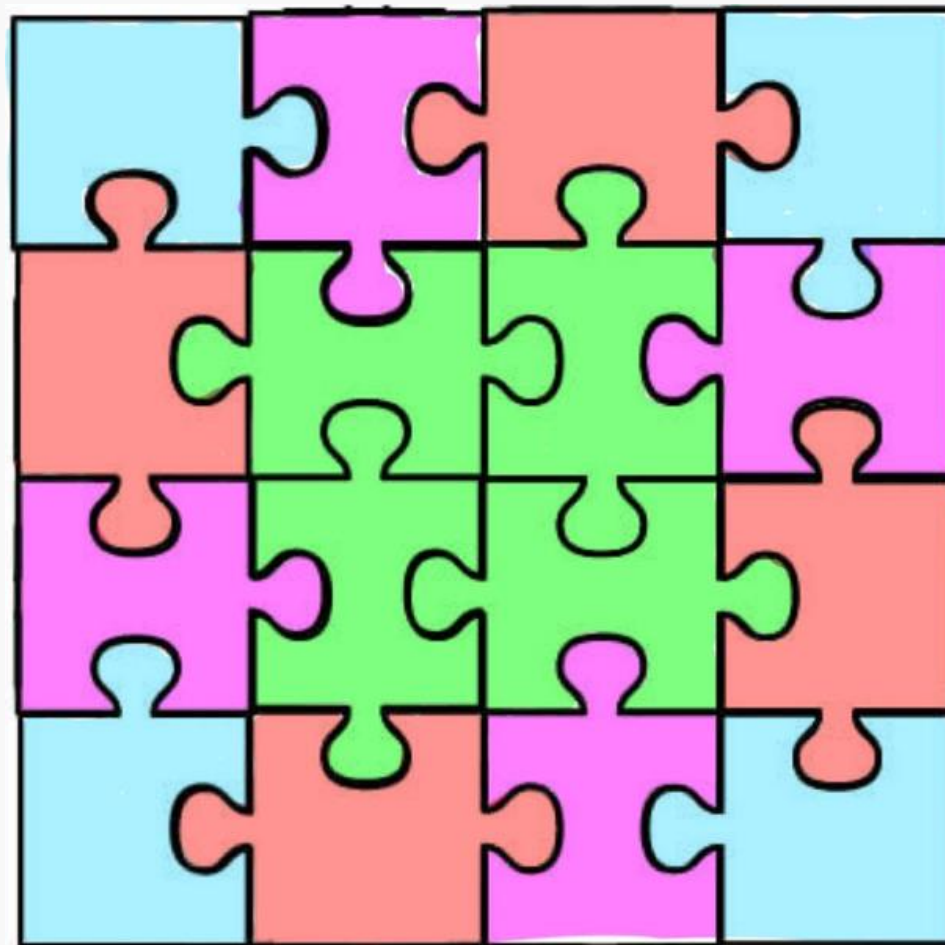


ผลการดำเนินงาน

13

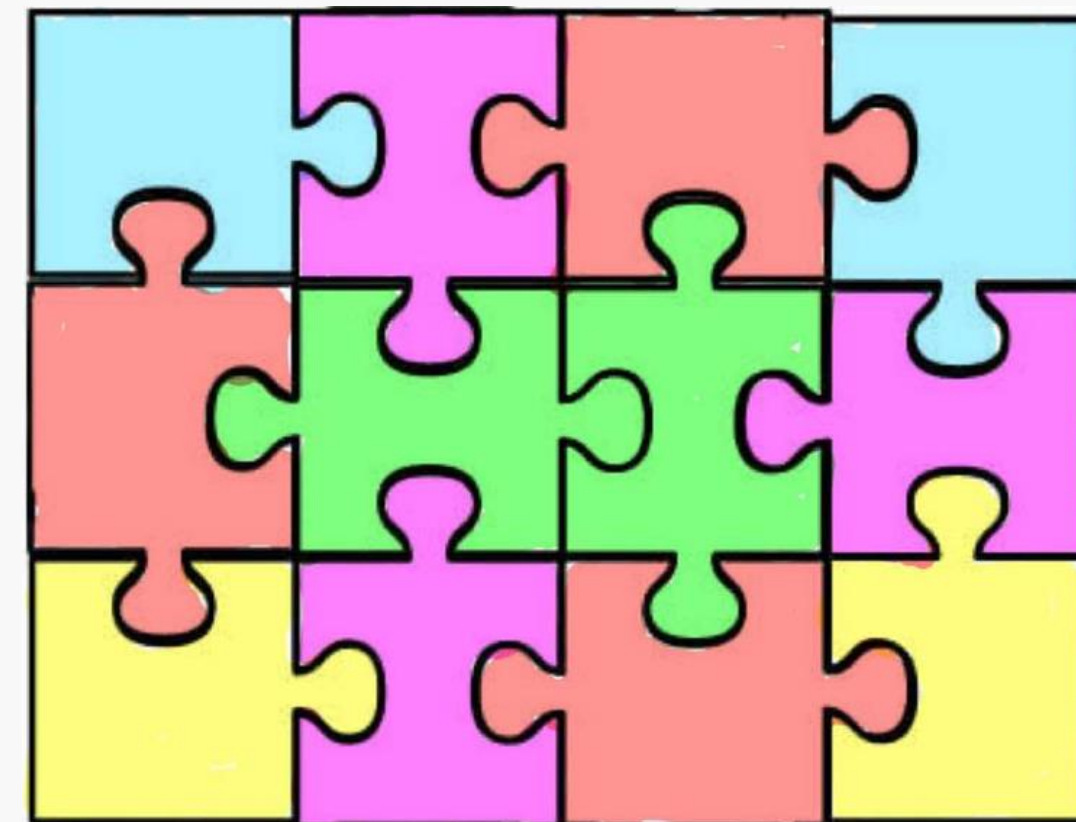


เมื่อ m และ n หาร 2 ลงตัว



จิ๊กซอว์แบบสลับขนาด 4×4

เมื่อ m หรือ n หาร 2 ไม่ลงตัว



จิ๊กซอว์แบบสลับขนาด 3×4

ผลการดำเนินงาน

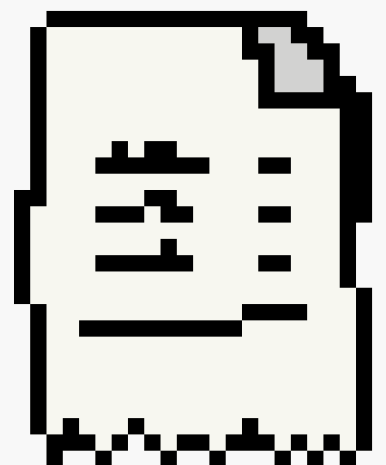
14

1.2 เปรียบเทียบปริภูมิตัวอย่างในแต่ละส่วนของจิ๊กแบบ
สลับขนาด 2×2 ถึงจิ๊กบอร์ดแบบสลับขนาด 6×6

ขนาดของจิ๊กบอร์ด ขนาด $m \times n$	ปริภูมิตัวอย่างของส่วนมุม	ปริภูมิตัวอย่างของส่วนขอบ	ปริภูมิตัวอย่างส่วนกลาง
2×2	$4!$	$0!$	$0!$
2×3	$2! \times 2!$	$1! \times 1!$	$0!$
3×3	$2! \times 2!$	$2! \times 2!$	$1!$
3×4	$2! \times 2!$	$3! \times 3!$	$2!$
4×2	$4!$	$2! \times 2!$	$0!$
4×4	$4!$	$4! \times 4!$	$4!$
5×2	$2! \times 2!$	$3! \times 3!$	$0!$
5×3	$2! \times 2!$	$4! \times 4!$	$3!$
5×4	$2! \times 2!$	$5! \times 5!$	$6!$
5×5	$2! \times 2!$	$6! \times 6!$	$9!$
6×2	$4!$	$4! \times 4!$	$0!$
6×3	$2! \times 2!$	$5! \times 5!$	$4!$
6×4	$4!$	$6! \times 6!$	$8!$
6×5	$2! \times 2!$	$7! \times 7!$	$12!$
6×6	$4!$	$8! \times 8!$	$16!$

1.3 ศึกษาขนาดของจิ๊กซอว์ส่งผลต่อรูปแบบการเปลี่ยนแปลงต่อรูปแบบ
ของส่วนประกอบต่างๆในจิ๊กซอว์

1.3.1 จากการสังเกตตัวอย่างของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาดต่างๆพบว่า
จิ๊กซอว์ ขนาด $2 \times 2, 2 \times 4, 2 \times 6, 4 \times 4, 4 \times 6, 6 \times 6$
มีปริภูมิตัวอย่างเท่ากับ $4!$ ในขณะที่
จิ๊กซอว์ขนาด $3 \times 3, 3 \times 4, 3 \times 5, 3 \times 6, 4 \times 5, 5 \times 5, 5 \times 6$
จะมีปริภูมิตัวอย่าง $2! \times 2!$

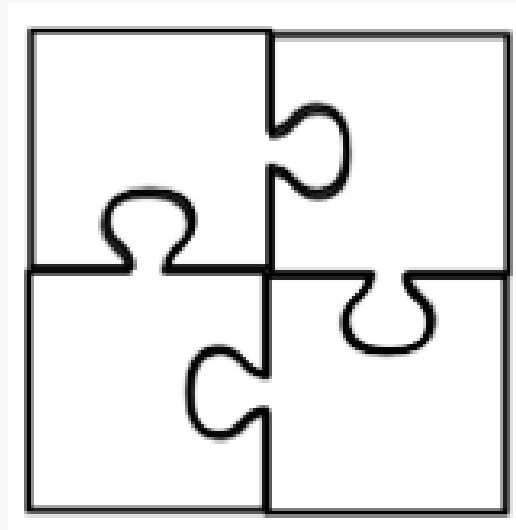


ผลการดำเนินงาน

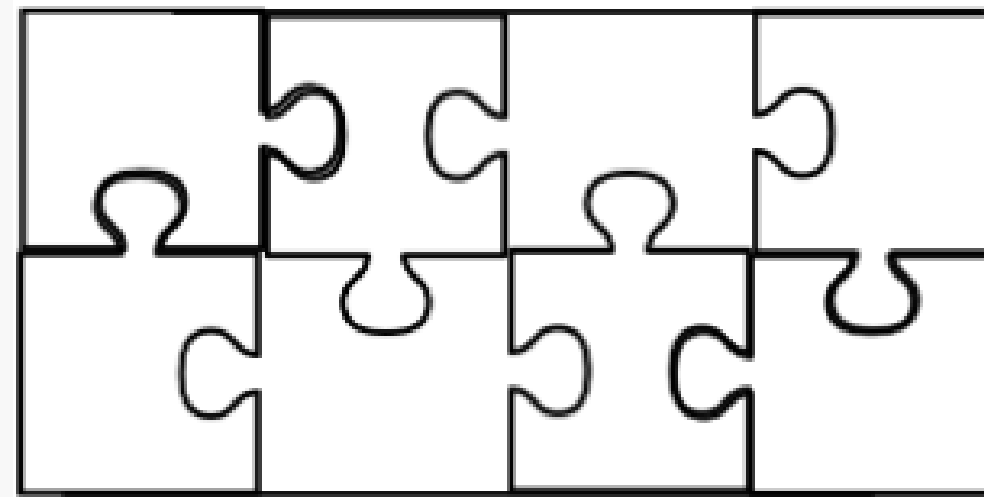
16

1.3.2 ส่วนขอบจากการสังเกตตัวอย่างของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาดต่างๆพบว่าหากจิ๊กซอว์มี m หรือ n น้อยกว่า 3 จะไม่ปรากฏส่วนขอบในแนวนั้นๆ และจะไม่ปรากฏส่วนกลางเช่นกัน

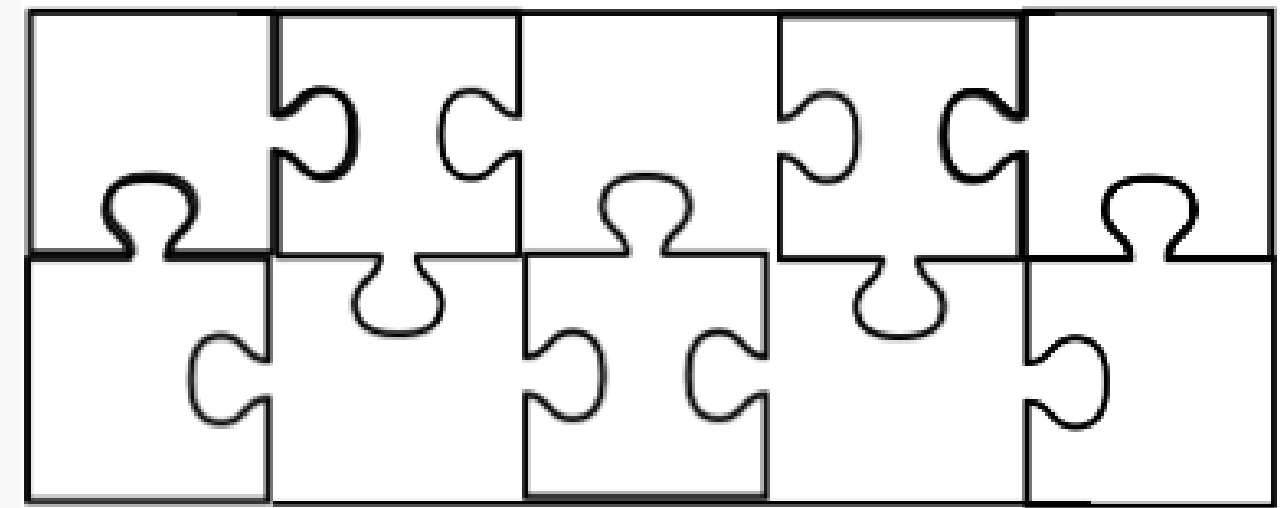
จิ๊กซอว์แบบสลับขนาด 2×2



จิ๊กซอว์แบบสลับขนาด 2×4



จิ๊กซอว์แบบสลับขนาด 2×5



ตอนที่ 2. หารูปแบบที่ใช้ในการหาปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$

2.1 หารูปแบบในการหาปริภูมิตัวอย่างในส่วนมุม

- เมื่อ m และ n หาร 2 ลงตัว ปริภูมิส่วนขอบของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ จะมีจิ๊กซอว์เพียง 1 รูปแบบที่สามารถสลับกันได้ 4 ชิ้นจึงได้

รูปแบบในการหาปริภูมิตัวอย่างของมุมจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ เป็น $4!$

- เมื่อ m หรือ n หาร 2 ไม่ลงตัว ปริภูมิส่วนขอบของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ จะมีจิ๊กซอว์ 2 รูปแบบที่สามารถสลับกันได้รูปแบบละ 2 ชิ้นเท่านั้นจึงได้

รูปแบบในการหาปริภูมิตัวอย่างของมุมจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ เป็น $2! \times 2!$



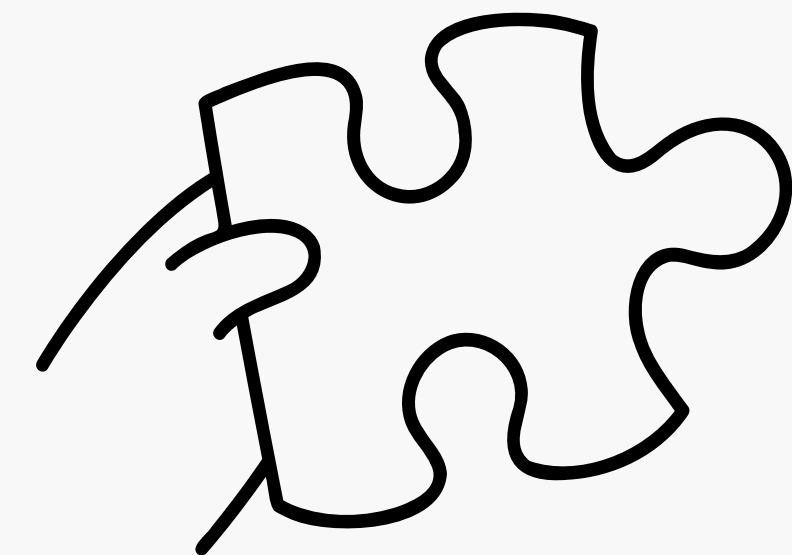
ผลการดำเนินงาน

2.2 หารูปแบบปริภูมิตัวอย่างในส่วนขอบโดยใช้วิธีการ
ถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร (multiple linear regression)

19

y	x_1	x_2	$(x_1)^2$	$(x_2)^2$	$x_1 y$	$x_2 y$
0	2	2	4	4	0	0
1	2	3	4	9	2	3
2	2	4	4	16	4	8
3	2	5	4	25	6	15
4	2	6	4	36	8	24
2	3	3	9	9	6	6
3	3	4	9	16	9	12
4	3	5	9	25	12	20
5	3	6	9	36	15	30
4	4	4	16	16	16	16
5	4	5	16	25	20	25
6	4	6	16	36	24	36
6	5	5	25	25	30	30
7	5	6	25	36	35	42
8	6	6	36	36	48	48

เตรียมข้อมูลเพื่อนำมาใช้ในการคำนวณ



ผลการดำเนินงาน

จาก $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$

$$\beta_1 = \frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_2 y)}{(\sum x_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_1 y)}{(\sum x_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

ผลการดำเนินงาน

จากการหาจำนวนจิกซอร์ที่สามารถสลับกันได้ในส่วนขอบทำให้ได้เป็นรูปแบบการหาจำนวนจิกซอร์ที่สามารถสลับกันได้ใน 1 รูปแบบของส่วนขอบเป็น $y = -4 + m + n$

$$Y = -4 + m + n$$

$$\text{จาก } \sum x_i y = \sum x_i y - \frac{(\sum x_i)(\sum y)}{N}$$

$$\sum x_1 y = 235 - \frac{(50)(60)}{15} = 35$$

$$\sum x_2 y = 315 - \frac{(70)(60)}{15} = 35$$

$$\text{จาก } \sum x_1 x_2 = \sum x_1 x_2 - \frac{(\sum x_1)(\sum x_2)}{N}$$

$$\sum x_1 x_2 = 245 - \frac{(50)(70)}{15} = \frac{35}{3}$$

$$\text{จาก } \sum x_i^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N}$$

$$\sum x_1^2 = 190 - \frac{50^2}{15} = \frac{70}{3}$$

$$\sum x_2^2 = 350 - \frac{70^2}{15} = \frac{70}{3}$$

$$\text{จาก } \beta_1 = \frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_2 y)}{(\sum x_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\left(\frac{70}{3}\right)(35) - \left(\frac{35}{3}\right)(35)}{\left(\frac{70}{3}\right)\left(\frac{70}{3}\right) - \left(\frac{35}{3}\right)^2} = 1$$

$$\text{จาก } \beta_2 = \frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2 y) - (\sum x_1 x_2)(\sum x_1 y)}{(\sum x_2^2)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{\left(\frac{70}{3}\right)(35) - \left(\frac{35}{3}\right)(35)}{\left(\frac{70}{3}\right)\left(\frac{70}{3}\right) - \left(\frac{35}{3}\right)^2} = 1$$

$$\text{จาก } \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 - \beta_2 \bar{x}_2$$

$$\beta_0 = \frac{60}{15} - \frac{50}{15} - \frac{70}{15} = -4$$

$$\text{จาก } y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

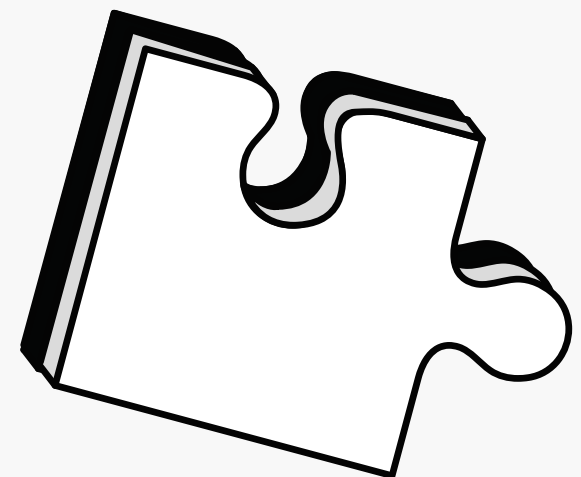
$$Y = -4 + m + n$$

ผลการดำเนินงาน

22

Y เป็นจำนวนจิกซอร์ที่สามารถสลับกันได้ 1 รูปแบบในส่วนขอบจึงสามารถสรุปได้ว่า ในส่วนขอบมีปริภูมิตัวอย่างของจิกซอร์เป็น

$$n(S) = [(m + n - 4)!]^2$$



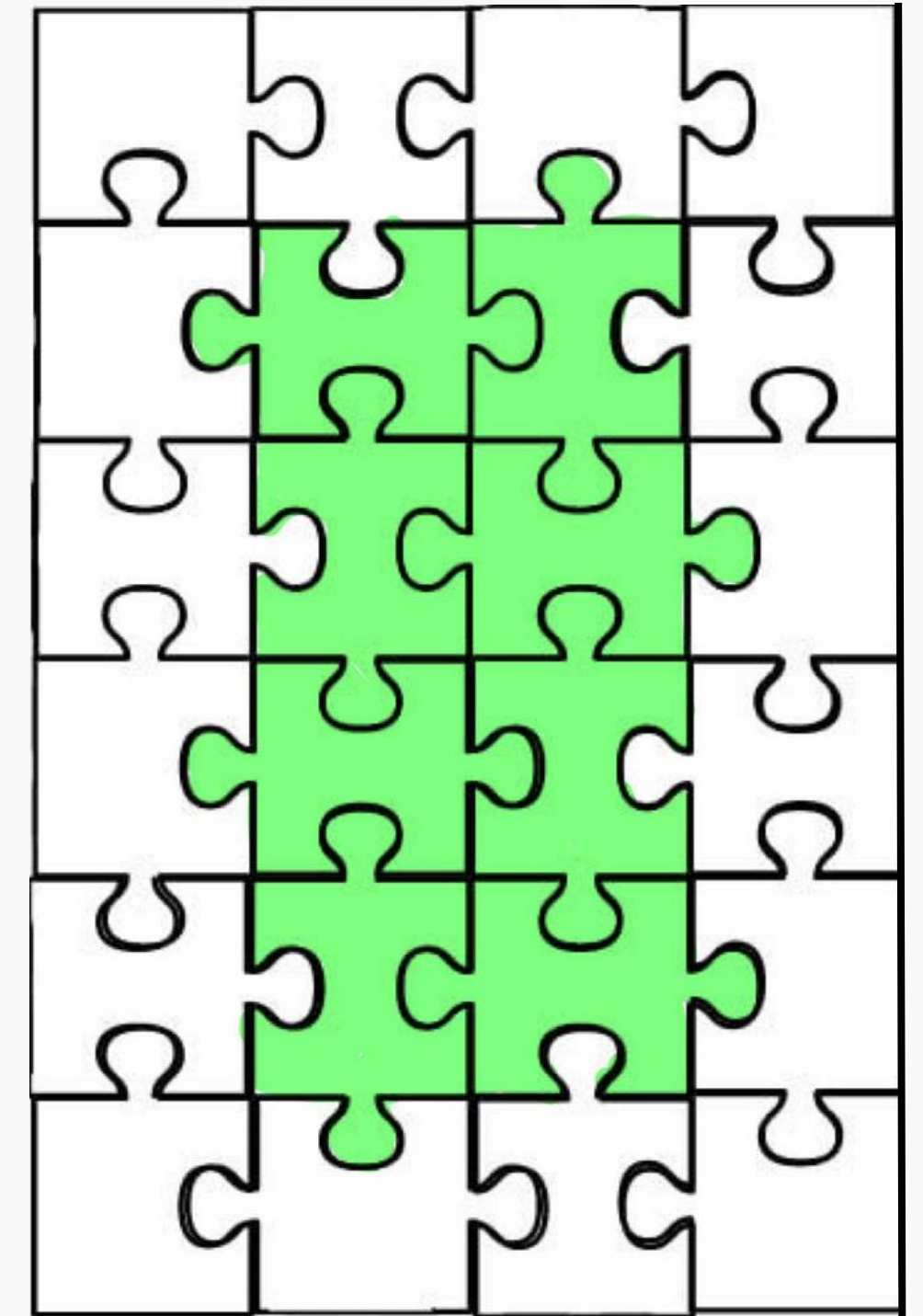
ผลการดำเนินงาน



23

2.3 หารูปแบบปริภูมิตัวอย่างในส่วนกลางโดยสังเกตจากลักษณะของรูปจิ๊กซอว์ได้ว่า ทุกๆจิ๊กซอว์ที่มี และมากกว่าเท่ากับ 2 จะมีส่วนกลางเท่ากับจำนวน ซึ่งเป็นพื้นที่ของส่วนขอบ 2 แถว คูณกับ $n - 2$ ซึ่งเป็นพื้นที่ส่วนขอบอีก 2 แถวจะเท่ากับจำนวนจิ๊กซอว์ในส่วนกลางทั้งหมดเนื่องจากส่วนกลางสามารถสลับกันได้ทั้งหมดจึงสามารถใช้แฟคทอเรียลเพื่อหาปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์ส่วนกลาง จึงได้สูตรในการหาพื้นที่ปริภูมิตัวอย่างเป็น

$$n(S) = [(n - 2)(m - 2)]!$$



ชิ้นจิ๊กซอว์ส่วนกลางของตัวอย่างจิ๊กซอว์แบบสลับ
ขนาด $m \times n$

ผลการดำเนินงาน

24

2.4 สรุปรูปแบบที่ใช้ในการหาปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ ในส่วนขอบส่วนมุม และส่วนกลางโดยใช้หลักการคูณ

สูตรที่ 1

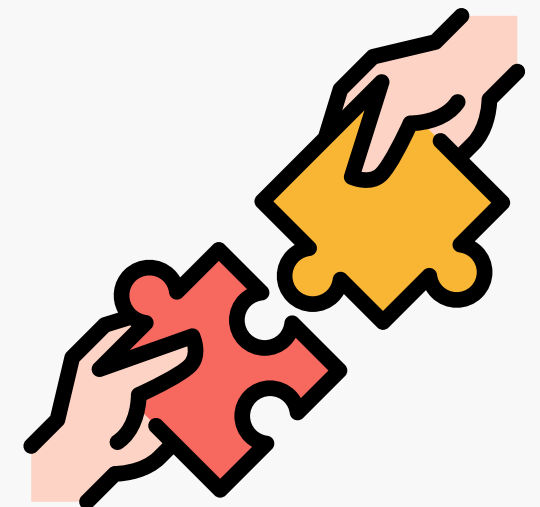
$$n(S) = 4[(m + n - 4)!]^2 [(n - 2)(m - 2)]!$$

เมื่อ m หรือ n หาร 2 ไม่ลงตัว

สูตรที่ 2

$$n(S) = 4![(m + n - 4)!]^2 [(n - 2)(m - 2)]!$$

เมื่อ m และ n หาร 2 ลงตัว

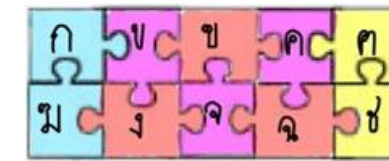


ผลการดำเนินงาน

25

2.5 พิสูจน์รูปแบบที่ใช้ในการหาปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์แบบสลับขนาด $m \times n$ เมื่อ m หรือ n หาร 2 ไม่ลงตัว โดยใช้หลักการนับเบื้องต้นเปรียบเทียบกับการใช้สูตร

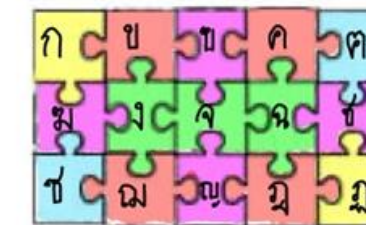
m	n	ค่าปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์ที่ได้จาก คำนวณโดยใช้สูตร	ค่าปริภูมิตัวอย่างของจิ๊กซอว์ที่ได้จากคำนวณ โดยใช้ภาพของรูปจิ๊กซอว์แต่ละแบบมา คำนวณโดยใช้หลักการนับเบื้องต้น
2	3	4	4
2	5	144	144
3	3	16	16
3	4	288	288
3	5	13824	13824
3	6	1382400	1382400
4	5	41472000	41472000
5	5	752467968000	752467968000
5	6	4866962817024000	48669628170240000



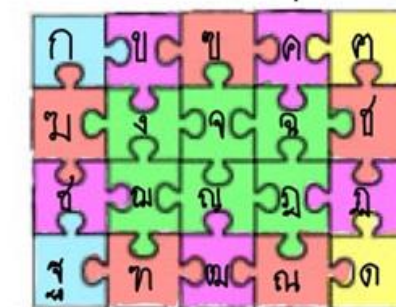
$$2! 2! 3! 0! = 144$$



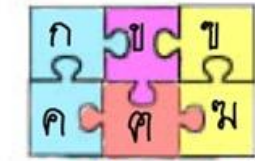
$$2! 2! 2! 2! 1! = 16$$



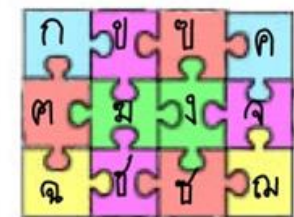
$$2! 2! 4! 3! = 13824$$



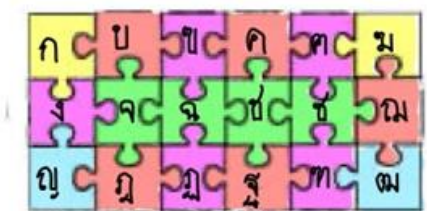
$$2! 2! 5! 5! 6! = 41472000$$



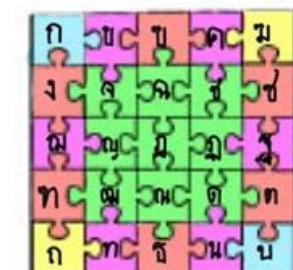
$$2! 2! 1! 1! 0! = 4$$



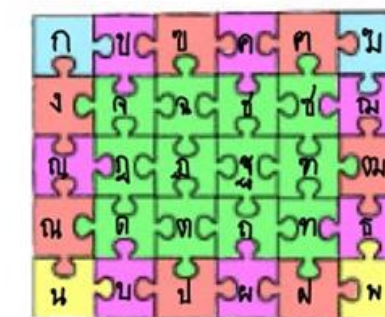
$$2! 2! 3! 3! 2! = 288$$



$$2! 2! 5! 5! 4! = 1382400$$



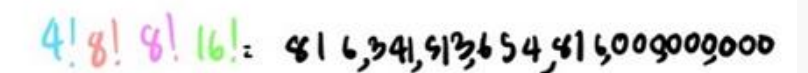
$$2! 2! 6! 6! 4! = 752467968000$$



$$2! 2! 7! 7! 12! = 48669628170240000$$

พิสูจน์รูปแบบที่ใช้ในการหาปริภูมิตัวอย่างของจิกซอร์แบบสลับขนาด $m \times n$
เมื่อ m และ n หาค่า 2 ลงตัว โดยใช้หลักการนับเบื้องต้นเปรียบเทียบกับการใช้สูตร

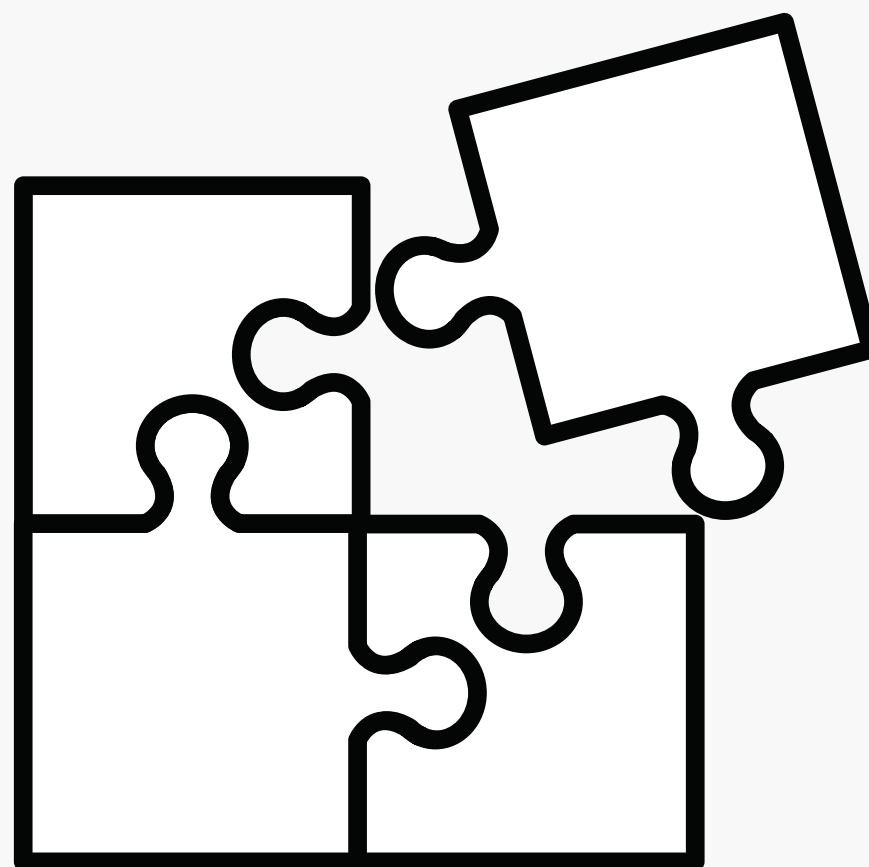
m	n	ค่าปริภูมิตัวอย่างของจิกซอร์ที่ได้จาก คำนวณโดยใช้สูตร	ค่าปริภูมิตัวอย่างของจิกซอร์ที่ได้จาก คำนวณโดยใช้ภาพของรูปจิกซอร์แต่ ละแบบมาคำนวณโดยใช้หลักการนับ เบื้องต้น
2	2	24	24
2	4	96	96
2	6	13824	13824
4	4	33176	33176
4	6	501645312000	501645312000
6	6	8163415136548160000000000	8163415136548160000000000



1. นำไปต่อยอดโดยการหาความสัมพันธ์จิ๊กซอว์ในรูปที่นอกเหนือจากจิ๊กซอว์แบบสลับ
2. ประยุกต์กับรูปแบบที่มีความสัมพันธ์ใกล้เคียงกับจิ๊กซอว์
3. พัฒนาสูตรให้ครอบคลุมไปถึงจิ๊กซอว์แบบสลับที่มีขนาดใหญ่กว่า 6×6



THANK YOU



การคิดโดยใช้สูตรในexcel

m	n	sample space
2	3	4
2	5	144
3	3	16
3	4	288
3	5	13824
3	6	1382400
4	5	41472000
5	5	752467968000
5	6	48669628170240000
2	2	24
2	4	96
2	6	13824
4	4	331776
4	6	501645312000
6	6	8163415136548160000000000